PROCEEDINGS OF IAM, V.7, N.1, 2018, pp.19-36

# ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ТИПА ГУРСА-ДАРБУ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ*

**М.А. Садыгов[1], Дж.Дж. Мамедова[2], И.С. Ахундов[1]**

[1]Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет
[2]Бакинский Государственный Университет
e-mail: misreddin08@rambler.ru

**Резюме.** В работе получено необходимое условие экстремума для экстремальной задачи дифференциальных включений типа Гурса-Дарбу в бесконечной области.

**Ключевые слова:** задача Гурса-Дарбу, нормальный интегрант, включение, экстремальная задача.

**AMS Subject Classification:** 49J15, 49J35.

## 1. Введение

В работе получено необходимое условие экстремума для экстремальной задачи дифференциальных включений типа Гурса-Дарбу в бесконечной области. В работе изучена также непрерывная зависимость решения от возмущения дифференциального включения типа Гурса-Дарбу.

Исследуется существование почти всюду решения задачи включения типа Гурса-Дарбу. Когда правая часть включения типа Гурса-Дарбу удовлетворяет условию Липшица по метрике Хаусдорфа с постоянным коэффициентом, то такие вопросы в конечной области изучены в [6]. Работа состоит из двух пунктов. В п.2 изучена непрерывная зависимость решений дифференциального включения типа Гурса-Дарбу от правой части и граничных условий. В п.3 показано, что при помощи замены переменных экстремальные задачи для дифференциальных включений типа Гурса-Дарбу в бесконечной области можно привести к задачам в конечной области. Далее получено необходимое условие экстремума для экстремальной задачи дифференциальных включений типа Гурса-Дарбу. Эта задача рассмотрена впервые. Экстремальная задача для дифференциальных включений в бесконечной области рассмотрена также в [7].

## 2. Непрерывная зависимость решений дифференциального включения типа Гурса- Дарбу от правой части и граничных условий

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 23.01.2018

Пусть $R^n$-n-мерное евклидово пространство. Через $2^{R^n}$ обозначим совокупность всех подмножеств пространства $R^n$. Совокупность всех непустых компактных подмножеств $R^n$ обозначим через $\mathrm{comp}R^n$.

Пусть $A, C \subset 2^{R^n}$. Если одно из них пусто, то положим $\rho_X(A,C)=0$, если $A$ и $C$ не пустые, то положим $\rho_X(A,C)=\max\{\sup_{x\in C} d(x,A), \sup_{y\in A} d(y,C)\}$, [3,8], где $d(x,A)=\inf\{|x-y| : y\in A\}$.

Множество всех абсолютно-непрерывных функций, определенных в $[0,T]\times[0,S]$ обозначим через $A^n([0,T]\times[0,S])$ (см.[5]).

В дальнейшем равенства и включения, связанные с измеримыми функциями или отображениями, понимаются как почти всюду.

**Лемма 1.** Пусть $a:[0,T]\times[0,S]\times R^n \to \mathrm{comp}R^n$, $k(\cdot)\in L_1([0,T]\times[0,S])$, где $k(t,s)\ge 0$ и $\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu<1$, $\rho(\cdot)\in L_1([0,T]\times[0,S])$, $\xi_1(\cdot)\in C[0,S]$, $\eta_1(\cdot)\in C[0,T]$, $\varphi(\cdot)\in W^n_{1,1}[0,S]$, $\psi(\cdot)\in W^n_{1,1}[0,T]$, $\varphi(0)=\psi(0)$, отображение $(t,s)\to a(t,s,x)$ измеримо и

$$\rho_x(a(t,s,x),a(t,s,y))\le k(t,s)|x-y|$$

при $x,y\in R^n$. Если для $\bar u\in A^n([0,T]\times[0,S])$ удовлетворяются условия

$$d(\bar u_{ts}(t,s),a(t,s,\bar u(t,s)))\le\rho(t,s),$$
$$d(\bar u(0,s),\varphi(s))\le\xi_1(s),\ d(\bar u(t,0),\psi(t))\le\eta_1(t)$$

при $(t,s)\in[0,T]\times[0,S]$, то существует решение задачи

$$u_{ts}(t,s)\in a(t,s,u(t,s)),$$
$$u(t,0)=\psi(t),\ u(0,s)=\varphi(s)$$

такое, что

$$|u_{t,s}(t,s)-\bar u_{ts}(t,s)|\le\rho(t,s)+\frac{ck(t,s)}{1-\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu},$$

$$|u(t,s)-\bar u(t,s)|\le\frac{c}{1-\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu},$$

где $c=\max_{(t,s)\in[0,T]\times[0,S]}\left\{\xi_1(s)+\eta_1(t)+\xi_1(0)+\int_0^T\int_0^S\rho(t,s)dt\,ds\right\}$.

**Доказательство.** Построим последовательность $\{u_i\}$ следующим образом

$$u_0(t,s)=\bar{u}(t,s), \quad u_{i+1}(t,s)=\varphi(s)+\psi(t)-\varphi(0)+\int_0^t\int_0^s v_i(\tau,\nu)d\tau d\nu,$$

где $v_i(t,s)\in a(t,s,u_i(t,s))$ при $i=0,1,2,\ldots$, $v_i(t,s)$ измеримы и

$$\left|v_i(t,s)-u_{i_{ts}}(t,s)\right|=d(u_{i_{ts}}(t,s),a(t,s,u_i(t,s))).$$

По лемме 2.1.4 [8] существуют такие функции $v_i(t,s)$. По условию

$$\left|u_{i+1_{ts}}(t,s)-u_{i_{ts}}(t,s)\right|\le k(t,s)\left|u_i(t,s)-u_{i-1}(t,s)\right|, \tag{1}$$

$$\left|u_{i+1}(t,s)-u_i(t,s)\right|\le\int_0^t\int_0^s \left|u_{i+1_{ts}}(\tau,\nu)-u_{i_{ts}}(\tau,\nu)\right|d\tau d\nu$$

при $i=1,2,\ldots$. Так как

$$\left|u_{1_{ts}}(t,s)-u_{0_{ts}}(t,s)\right|\le\rho(t,s),$$

$$\left|u_1(t,s)-u_0(t,s)\right|\le\xi_1(s)+\eta_1(t)+\xi_1(0)+\int_0^t\int_0^s\rho(\tau,\nu)d\tau d\nu\le c,$$

где $c=\max\limits_{(t,s)\in[0,T]\times[0,S]}\left\{\xi_1(s)+\eta_1(t)+\xi_1(0)+\int_0^T\int_0^S\rho(t,s)dt\,ds\right\}$, то из соотношения (1) следует

$$\left|u_{2_{ts}}(t,s)-u_{1_{ts}}(t,s)\right|\le k(t,s)c,$$

$$\left|u_2(t,s)-u_1(t,s)\right|\le c\int_0^t\int_0^s k(\tau,\nu)d\tau d\nu.$$

Ясно, что

$$\left|u_{3_{ts}}(t,s)-u_{2_{ts}}(t,s)\right|\le k(t,s)c\int_0^t\int_0^s k(\tau,\nu)d\tau d\nu,$$

$$\left|u_3(t,s)-u_2(t,s)\right|\le c\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^2.$$

Поэтому из соотношения (1) вытекает

$$\left|u_{4_{ts}}(t,s)-u_{3_{ts}}(t,s)\right|\le k(t,s)c\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^2,$$

$$\left|u_4(t,s)-u_3(t,s)\right|\le c\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^3.$$

При $i=4$ аналогично имеем, что

$$\left|u_{5_{ts}}(t,s)-u_{4_{ts}}(t,s)\right| \le k(t,s)c\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^3,$$

$$\left|u_5(t,s)-u_4(t,s)\right| \le c\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^4.$$

Продолжая процесс, получим

$$\left|u_{m+1_{ts}}(t,s)-u_{m_{ts}}(t,s)\right| \le k(t,s)c\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^{m-1}, \qquad (2)$$

$$\left|u_{m+1}(t,s)-u_m(t,s)\right| \le c\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^m. \qquad (3)$$

По условию $\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu < 1$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\left|u_{m+1_{ts}}(t,s)-\bar{u}_{ts}(t,s)\right| \le \left|u_{1_{ts}}(t,s)-\bar{u}_{ts}(t,s)\right| + \left|u_{2_{ts}}(t,s)-u_{1_{ts}}(t,s)\right| + \left|u_{3_{ts}}(t,s)-u_{2_{ts}}(t,s)\right| + \\
&+\left|u_{4_{ts}}(t,s)-u_{3_{ts}}(t,s)\right| + \ldots + \left|u_{m+1_{ts}}(t,s)-u_{m_{ts}}(t,s)\right| \le \rho(t,s)+k(t,s)c+ck(t,s)\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu + \\
&+ck(t,s)\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^2 + ck(t,s)\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^3 + \ldots + ck(t,s)\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^{m-1} \le \\
&\le \rho(t,s)+ck(t,s)\times\left(1+\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu + \left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^2 + \ldots + \left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^{m-1}\right) \le \\
&\le \rho(t,s)+ck(t,s)\frac{1}{1-\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu},
\end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}
&\left|u_{m+1}(t,s)-\bar{u}(t,s)\right| \le \left|u_1(t,s)-\bar{u}(t,s)\right| + \left|u_2(t,s)-u_1(t,s)\right| + \left|u_3(t,s)-u_2(t,s)\right| + \\
&+\left|u_4(t,s)-u_3(t,s)\right| + \ldots + \left|u_{m+1}(t,s)-u_m(t,s)\right| \le c + c\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu +
\end{aligned}$$

$$+c\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^2+c\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^3+c\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^4+\ldots+$$
$$+c\left(\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu\right)^m\le\frac{c}{1-\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu}. \qquad (5)$$

Из оценки (2), (3) вытекает, что последовательности $u_m(t,s)$ и $u_{m_{ts}}$ сходятся соответственно к функциям $u(t,s)$ и $y(t,s)$.

Так как $u_{m+1_{ts}}(t,s)=v_m(t,s)$, то из оценки (4) и теоремы Лебега следует, что $y(t,s)=u_{ts}(t,s)$. Поэтому из оценки (4) и (5) получим

$$|u_{ts}(t,s)-\bar{u}_{ts}(t,s)|\le\rho(t,s)+ck(t,s)\frac{1}{1-\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu},$$

$$|u(t,s)-\bar{u}(t,s)|\le\frac{c}{1-\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau d\nu}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть $a:[0,T]\times[0,S]\times R^n\to \mathrm{comp}R^n$, $k_1(\cdot)\in L_1[0,T]$, $k_2(\cdot)\in L_1[0,S])$, $k_1(t)\ge 0$, $k_2(s)\ge 0$, $\rho(\cdot)\in L_1([0,T]\times[0,S])$, $\xi_1(\cdot)\in C[0,S]$, $\eta_1(\cdot)\in C[0,T]$, $\varphi(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,S]$, $\psi(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$, $\varphi(0)=\psi(0)$, отображение $(t,s)\to a(t,s,x)$ измеримо и

$$\rho_x(a(t,s,x),a(t,s,y))\le k_1(t)k_2(s)|x-y|$$

при $x,y\in R^n$. Если для $\bar{u}\in A^n([0,T]\times[0,S])$ удовлетворяются условия

$$d(\bar{u}_{ts}(t,s),a(t,s,\bar{u}(t,s)))\le\rho(t,s),$$
$$d(\bar{u}(0,s),\varphi(s))\le\xi_1(s),\ d(\bar{u}(t,0),\psi(t))\le\eta_1(t),$$

то существует решение задачи

$$u_{ts}(t,s)\in a(t,s,u(t,s)),$$
$$u(t,0)=\psi(t),\ \ u(0,s)=\varphi(s)$$

такое, что

$$|u_{ts}(t,s)-\bar{u}_{ts}(t,s)|\le\rho(t,s)+c\,k_1(t)k_2(s)e^{\int_0^t k_1(\tau)d\tau+\int_0^s k_2(\nu)d\nu},$$

$$|u(t,s)-\bar{u}(t,s)|\le ce^{\int_0^t k_1(\tau)d\tau+\int_0^s k_2(\nu)d\nu},$$

где $c=\max\limits_{(t,s)\in[0,T]\times[0,S]}\left\{\xi_1(s)+\eta_1(t)+\xi_1(0)+\int\limits_0^T\int\limits_0^S\rho(t,s)dt\,ds\right\}$.

**Доказательство.** Построим последовательность $\{u_i\}$ следующим образом

$$u_0(t,s)=\bar{u}(t,s),\quad u_{i+1}(t,s)=\varphi(s)+\psi(t)-\varphi(0)+\int\limits_0^t\int\limits_0^s v_i(\tau,\nu)d\tau d\nu,$$

где $v_i(t,s)\in a(t,s,u_i(t,s))$ при $i=0,1,2,\ldots$, $v_i(t,s)$ измеримы и

$$\left|v_i(t,s)-u_{i_{ts}}(t,s)\right|=d(u_{ts}(t,s),a(t,s,u_i(t,s))).$$

По лемме 2.1.4 [7] существуют такие функции $v_i(t,s)$. По условию

$$\left|u_{i+1_{ts}}(t,s)-u_{i_{ts}}(t,s)\right|\le k_1(t)k_2(s)\left|u_i(t,s)-u_{i-1}(t,s)\right|, \tag{6}$$

$$\left|u_{i+1}(t,s)-u_i(t,s)\right|\le\int\limits_0^t\int\limits_0^s\left|u_{i+1_{ts}}(\tau,\nu)-u_{i_{ts}}(\tau,\nu)\right|d\tau d\nu. \tag{7}$$

$i=1,2,\ldots$. Так как

$$\left|u_{1_{ts}}(t,s)-u_{0_{ts}}(t,s)\right|\le\rho(t,s),$$

$$\left|u_1(t,s)-u_0(t,s)\right|\le\xi_1(s)+\eta_1(t)+\xi(0)+\int\limits_0^t\int\limits_0^s\rho(\tau,\nu)d\tau d\nu\le c,$$

где $c=\max\limits_{s\in[0,S],\,t\in[0,T]}(\xi_1(s)+\eta_1(t)+\xi(0)+\int\limits_0^T\int\limits_0^S\rho(\tau,\nu)d\tau d\nu)$, то из соотношения (6) и (7) следует, что

$$\left|u_{2_{ts}}(t,s)-u_{1_{ts}}(t,s)\right|\le ck_1(t)k_2(s),$$

$$\left|u_2(t,s)-u_1(t,s)\right|\le c\int\limits_0^t k_1(\tau)d\tau\int\limits_0^s k_2(\nu)d\nu.$$

Ясно, что

$$\left|u_{3_{ts}}(t,s)-u_{2_{ts}}(t,s)\right|\le ck_1(t)k_2(s)\int\limits_0^t k_1(\tau)d\tau\int\limits_0^s k_2(\nu)d\nu,$$

$$\left|u_3(t,s)-u_2(t,s)\right|\le c\int\limits_0^t\int\limits_0^s k_1(\tau)k_2(\nu)\int\limits_0^\tau\int\limits_0^\nu k_1(t_1)k_2(s_1)dt_1ds_1d\tau d\nu=$$

$$=c\int\limits_0^t k_1(\tau)\int\limits_0^\tau k_1(t_1)dt_1d\tau\int\limits_0^s k_2(\nu)\int\limits_0^\nu k_2(s_1)ds_1d\nu=c\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^2\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^2.$$

Поэтому из соотношения (6) и (7) получим

$$\left|u_{4_{ts}}(t,s)-u_{3_{ts}}(t,s)\right|\le ck_1(t)k_2(s)\frac{1}{2}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^2\frac{1}{2}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^2,$$

$$\left|u_4(t,s)-u_3(t,s)\right|\le c\frac{1}{3!}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^3\frac{1}{3!}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^3.$$

Продолжая процесс получим

$$\left|u_{m+1_{ts}}(t,s)-u_{m_{ts}}(t,s)\right|\le ck_1(t)k_2(s)\frac{1}{(m-1)!}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^{m-1}\frac{1}{(m-1)!}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^{m-1}, \quad (8)$$

$$\left|u_{m+1}(t,s)-u_m(t,s)\right|\le c\frac{1}{m!}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^m\frac{1}{m!}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^m. \quad (9)$$

Поэтому

$$\left|u_{m+1_{ts}}(t,s)-\overline{u}_{ts}(t,s)\right|\le\left|u_{1_{ts}}(t,s)-\overline{u}_{ts}(t,s)\right|+\left|u_{2_{ts}}(t,s)-u_{1_{ts}}(t,s)\right|+\left|u_{3_{ts}}(t,s)-u_{2_{ts}}(t,s)\right|+$$

$$+\left|u_{4_{ts}}(t,s)-u_{3_{ts}}(t,s)\right|+\ldots+\left|u_{m+1_{ts}}(t,s)-u_{m_{ts}}(t,s)\right|\le\rho(t,s)+ck_1(t)k_2(s)+$$

$$+ck_1(t)k_2(s)\int_0^t k_1(\tau)d\tau\int_0^s k_2(\nu)d\nu+ck_1(t)k_2(s)\cdot\frac{1}{2}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^2\frac{1}{2}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^2+\ldots+$$

$$+ck_1(t)k_2(s)\frac{1}{(m-1)!}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^{m-1}\frac{1}{(m-1)!}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^{m-1}=\rho(t,s)+$$

$$+ck_1(t)k_2(s)\left(1+\int_0^t k_1(\tau)d\tau\int_0^s k_2(\nu)d\nu+\frac{1}{2}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^2\frac{1}{2}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(m-1)!}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^{m-1}\frac{1}{(m-1)!}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^{m-1}\right)\le\rho(t,s)+$$

$$+ck_1(t)k_2(s)\left(1+\int_0^t k_1(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(m-1)!}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^{m-1}\right)\left(1+\int_0^s k_2(\nu)d\nu+\frac{1}{2}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^2+\ldots+\right. \qquad (10)$$

$$\left.+\frac{1}{(m-1)!}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^{m-1}\right)\le \rho(t,s)+ck_1(t)k_2(s)e^{\int_0^t k_1(\tau)d\tau+\int_0^s k_2(\nu)d\nu}.$$

Аналогично получим, что

$$\left|u_{m+1}(t,s)-\bar{u}(t,s)\right|\le\left|u_1(t,s)-\bar{u}(t,s)\right|+\left|u_2(t,s)-u_1(t,s)\right|+\left|u_3(t,s)-u_2(t,s)\right|+$$

$$+\left|u_4(t,s)-u_3(t,s)\right|+\ldots+\left|u_{m+1}(t,s)-u_m(t,s)\right|\le c+c\int_0^t k_1(\tau)d\tau\int_0^s k_2(\nu)d\nu+$$

$$+c\frac{1}{2}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^2\frac{1}{2}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^2+c\frac{1}{3!}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^3\frac{1}{3!}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^3+$$

$$+\ldots+c\frac{1}{m!}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^m\frac{1}{m!}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^m\le$$

$$\le c\left(1+\int_0^t k_1(\tau)d\tau+\frac{1}{2!}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^3+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m!}\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right)^m\right)\left(1+\int_0^s k_2(\nu)d\nu+\frac{1}{2!}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^3+\ldots+\right. \qquad (11)$$

$$\left.+\frac{1}{m!}\left(\int_0^s k_2(\nu)d\nu\right)^m\right)\le ce^{\int_0^t k_1(\tau)d\tau+\int_0^s k_2(\nu)d\nu}$$

Из оценки (8), (9) вытекает, что последовательности $u_m(t,s)$ , $u_{m_{ts}}$ сходятся, соответственно, к функциям $u(t,s)$ и $y(t,s)$. Так как $u_{m+1_{ts}}=v_m(t,s)$, то из оценки (10) и теоремы Лебега следует, что $y(t,s)=u_{ts}(t,s)$. Поэтому из оценки (10) и (11) получим, что

$$\left|u_{ts}(t,s)-\bar{u}_{ts}(t,s)\right|\le\rho(t,s)+ck_1(t)k_2(s)e^{\int_0^t k_1(\tau)d\tau+\int_0^s k_2(\nu)d\nu},$$

$$\left|u(t,s)-\bar{u}(t,s)\right|\le ce^{\int_0^t k_1(\tau)d\tau+\int_0^s k_2(\nu)d\nu}.$$

Лемма доказана.

### 3. Экстремальная задача для включения типа Гурса-Дарбу с бесконечной области

Пусть $a:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\times R^n \to compR^n$, $b_1:[0,+\infty)\times R^n \to compR^n$, $b_2:[0,+\infty)\times R^n \to compR^n$, $M_0 \subset R^n$ непустое, где $compR^n$ совокупность всех непустых компактных подмножеств $R^n$.

Функцию $u:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to R^n$ назовем абсолютно непрерывной, если ее сужение на любом прямоугольнике $[0,T]\times[0,S]\subset[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ абсолютно непрерывно. Множество всех абсолютно-непрерывных функций, определенных в $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ с конечной нормой

$$\|u(\cdot)\| = |u(0,0)| + \int_0^{+\infty}|u_t(\tau,0)|d\tau + \int_0^{+\infty}|u_s(0,\nu)|d\nu + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}|u_{ts}(\tau,\nu)|d\tau d\nu$$

обозначим через $A^n([0,+\infty)\times[0,+\infty))$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} u_{ts}(t,s)\in a(t,s,u(t,s)), \\ u_t(t,0)\in b_1(t,u(t,0)),\ u_s(0,s)\in b_2(s,u(0,s)),\ u(0,0)\in M_0 \end{gathered} \tag{12}$$

при $(t,s)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$.

Функция $u(\cdot)\in A^n([0,+\infty)\times[0,+\infty))$, удовлетворяющая соотношению (12) называется решением задачи (12). Множество решений задачи (12) обозначим через $A$.

Пусть $g:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\times R^n \to R$ нормальный интегрант. Решение включения (12), минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(t,s,u(t,s))dtds \tag{13}$$

среди всех решений задачи (12) назовем оптимальным. Требуется найти необходимые условия оптимальности решения задачи (12), (13).

Пусть удовлетворяются следующие условия:

1) Существуют функции $\alpha(\cdot)\in L_1([0,+\infty)\times[0,+\infty)), \alpha_1(\cdot)\in L_1[0,+\infty)$, $\alpha_2(\cdot)\in L_1[0,+\infty)$, где $\alpha(t,s)\ge 0$, $\alpha_1(t)\ge 0$ и $\alpha_2(s)\ge 0$ при $t\in[0,+\infty)$ и $s\in[0,+\infty)$ такие, что $\|a(t,s,u)\|\le\alpha(t,s)(1+|u|)$, $\|b_1(t,u)\|\le\alpha_1(t)(1+|u|)$, $\|b_2(s,u)\|\le\alpha_2(s)(1+|u|)$ при $u\in R^n$ (см.[7]).

2) $M_0$ непустое и существует число $r>0$ такое, что $\|M_0\| = \sup_{x\in M_0}|x| \le r$.

3) Многозначные отображения $a$, $b_1$ и $b_2$ удовлетворяют условию Каратеодори (см.[3]).

4) Интегрант $g$ удовлетворяет условию Каратеодори (см.[4]).

Пусть $u(\cdot)\in A$. Из соотношения $u_t(t,0)\in b_1(t,u(t,0))$, $u_s(0,s)\in b_2(s,u(0,s))$ вытекает, что

$$\int_0^t u_t(\tau,0)d\tau \in \int_0^t b_1(\tau,u(\tau,0))d\tau,\ \int_0^s u_s(0,\nu)d\nu \in \int_0^s b_2(\nu,u(0,\nu))d\nu .$$

Поэтому из условия $u(0,0)\in M_0$ имеем, что

$$u(t,0)\in M_0+\int_0^t b_1(\tau,u(\tau,0))d\tau,\ u(0,s)\in M_0+\int_0^s b_2(\nu,u(0,\nu))d\nu .$$

Из условия 1) вытекает, что

$$|u(t,0)|\le r+\int_0^t \alpha_1(\tau)(1+|u(\tau,0)|)d\tau \le r+\int_0^\infty \alpha_1(\tau)d\tau+\int_0^t \alpha_1(\tau)|u(\tau,0)|d\tau,$$

$$|u(0,s)|\le r+\int_0^s \alpha_2(\nu)(1+|u(0,\nu)|)d\nu \le r+\int_0^\infty \alpha_2(\nu)d\nu+\int_0^s \alpha_2(\nu)|u(0,\nu)|d\nu.$$

Обозначим $\beta=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\alpha(\tau,\nu)d\tau\,d\nu$, $\beta_1=\int_0^{+\infty}\alpha_1(\tau)d\tau$, $\beta_2=\int_0^{+\infty}\alpha_2(\nu)d\nu$, $r_1=r+\beta_1$ и $r_2=r+\beta_2$.

Применяя неравенства Гронуолла (см. [5] , теорема 1.1.1 и [2, стр.190] ) имеем

$$|u(t,0)|\le r_1\cdot e^{\int_0^t\alpha_1(\tau)d\tau},\qquad |u(0,s)|\le r_2\cdot e^{\int_0^s\alpha_2(\nu)d\nu}.$$

Поэтому $|u(t,0)|\le r_1\cdot e^{\beta_1}$, $|u(0,s)|\le r_2\cdot e^{\beta_2}$ при $t\in[0,+\infty)$ и $s\in[0,+\infty)$.

Так как $u_{ts}(t,s)\in a(t,s,u(t,s))$ при $(t,s)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, то имеем, что

$$\int_0^t\int_0^s u_{ts}(\tau,\nu)d\tau\,d\nu \in \int_0^t\int_0^s a(\tau,\nu,u(\tau,\nu))d\tau\,d\nu .$$

Поэтому

$$u(t,s)+u(0,0)-u(t,0)-u(0,s)\in \int_0^t\int_0^s a(\tau,\nu,u(\tau,\nu))d\tau\,d\nu .$$

Отсюда следует, что

$$\left|u(t,s)\right| \le r + r_1 e^{\beta_1} + r_2 e^{\beta_2} + \int_0^t\int_0^s \alpha(\tau,\nu)(1+\left|u(\tau,\nu)\right|)d\tau\, d\nu =$$

$$= \left( r + r_1 e^{\beta_1} + r_2 e^{\beta_2} + \int_0^t\int_0^s \alpha(\tau,\nu)d\tau\, d\nu \right) + \int_0^t\int_0^s \alpha(\tau,\nu)\left|u(\tau,\nu)\right| d\tau\, d\nu.$$

Применяя неравенство Вендроффа (см. [5] , теорема 1.3.1) имеем, что

$$\left|u(t,s)\right| \le \left( r + r_1 e^{\beta_1} + r_2 e^{\beta_2} + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \alpha(\tau,\nu)d\tau\, d\nu \right) e^{\int_0^t\int_0^s \alpha(\tau,\nu)d\tau\, d\nu}$$

при $(t,s) \in [0,+\infty)\times[0,+\infty)$.
Обозначив

$$k = \left( r + r_1 e^{\beta_1} + r_2 e^{\beta_2} + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \alpha(\tau,\nu)d\tau\, d\nu \right) e^{\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \alpha(\tau,\nu)d\tau\, d\nu}$$

получим, что $\left\|a(t,s,u(t,s))\right\| \le \alpha(t,s)(1+k)$ при $u(\cdot)\in A$.

Также получим, что

$$\left\|b_1(t,u(t,0))\right\| \le \alpha_1(t)(1+\left|u(t,0)\right|) \le \alpha_1(t)(1+r_1 e^{\beta_1}),$$

$$\left\|b_2(s,u(0,s))\right\| \le \alpha_2(s)(1+\left|u(0,s)\right|) \le \alpha_2(s)(1+r_2 e^{\beta_2})$$

при $u(\cdot)\in A$.

Обозначим $\mu_1(t) = \alpha_1(t)(1+r_1 e^{\beta_1}) + e^{-t}$, $\mu_2(s) = \alpha_2(s)(1+r_2 e^{\beta_2}) + e^{-s}$. Ясно, что $\mu_1(t) > 0$ и $\mu_2(s) > 0$ при $t\in[0,+\infty)$ и $s\in[0,+\infty)$. Положим $\theta_1(t) = \int_0^t \mu_1(\tau)d\tau$, $\theta_2(s) = \int_0^s \mu_2(\nu)d\nu$. Если $t$ меняется от 0 до $+\infty$, то функция $\theta_1(t)$ возрастает от 0 до $d_1 = (1+r_1 e^{\beta_1})\int_0^{+\infty}\alpha_1(\tau)d\tau + 1$. Поэтому существует обратная функция $\Phi_1 = \theta_1^{-1} : [0,d_1) \to [0,+\infty)$.

Если $s$ меняется от 0 до $+\infty$, то функция $\theta_2(s)$ возрастает от 0 до $d_2 = (1+r_2 e^{\beta_2})\int_0^{+\infty}\alpha_2(s)ds + 1 = (1+r_2 e^{\beta_2})\beta_2 + 1$. Поэтому существует обратная функция $\Phi_2 = \theta_2^{-1} : [0,d_2) \to [0,+\infty)$.

Пусть $\upsilon = u\circ(\theta_1^{-1},\theta_2^{-1}) = u\circ(\Phi_1,\Phi_2)$. По условию 3) теоремы 1.4.42, теоремы 1.4.43 и 2.3.11 [3] получим, что функции $\Phi_1 = [0,\tilde{d}_1] \to R$ и $\Phi_2 = [0,\tilde{d}_2] \to R$ абсолютно непрерывны при $\tilde{d}_1 \in [0,d_1)$ и $\tilde{d}_2 \in [0,d_2)$. Полагая $t = \Phi_1(\tau)$ при $\tau\in[0,d_1)$, $s = \Phi_2(\nu)$ при $\nu\in[0,d_2)$ получим, что задача (12), (13) эквивалентна следующей задаче: требуется минимизировать функционал

$$\int_0^{d_1}\int_0^{d_2} g(\Phi_1(\tau),\Phi_2(\nu),\upsilon(\tau,\nu))[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}[\mu_2(\Phi_2(\nu))]^{-1}d\tau\, d\nu \qquad (14)$$

при условиях

$$\upsilon_{\tau,\nu}(\tau,\nu)\in a(\Phi_1(\tau),\Phi_2(\nu),\upsilon(\tau,\nu))[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}[\mu_2(\Phi_2(\nu))]^{-1},$$

$$\upsilon_\tau(\tau,0)\in b_1(\Phi_1(\tau),\upsilon(\tau,0))[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}, \qquad (15)$$

$$\upsilon_\nu(0,\nu)\in b_2(\Phi_2(\nu),\upsilon(0,\nu))[\mu_2(\Phi_2(\nu))]^{-1},\ \upsilon(0,0)\in M_0$$

при $(\tau,\nu)\in[0,d_1]\times[0,d_2]$ (см.[3], стр.437).

Обозначив $F(\tau,\nu,x)=a(\Phi_1(\tau),\Phi_2(\nu),x)[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}[\mu_2(\Phi_2(\nu))]^{-1}$,

$$f(\tau,\nu,x)=g(\Phi_1(\tau),\Phi_2(\nu),x)[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}[\mu_2(\Phi_2(\nu))]^{-1},$$

$$c_1(\tau,x)=b_1(\Phi_1(\tau),x)[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1},$$

$$c_2(\nu,x)=b_2(\Phi_2(\nu),x)[\mu_2(\Phi_2(\nu))]^{-1}$$

задачи (14), (15) можно написать в следующем виде

$$I(\upsilon)=\int_0^{d_1}\int_0^{d_2} f(\tau,\nu,\upsilon(\tau,\nu))d\tau\, d\nu\to\min \qquad (16)$$

$$\upsilon_{\tau,\nu}(\tau,\nu)\in F(\tau,\nu,\upsilon(\tau,\nu)),$$

$$\upsilon_\tau(\tau,0)\in c_1(\tau,\upsilon(\tau,0)), \qquad (17)$$

$$\upsilon_\nu(0,\nu)\in c_2(\nu,\upsilon(0,\nu)),\ \upsilon(0,0)\in M_0, \text{ где } (\tau,\nu)\in[0,d_1]\times[0,d_2].$$

Получим, что если решение задачи (12) принадлежит в $A^n([0,+\infty)\times[0,+\infty))$, то при помощи замены переменных задачи (12), (13) можно привести к задачам в конечной области.

**Лемма 3.** Если выполняется условие 1)-3) и существуют $k(\cdot)$, $\overline{k}(\cdot)\in L_1([0,+\infty)\times[0,+\infty))$, $k_1(\cdot)$, $k_2(\cdot)\in L_1[0,+\infty)$ такие, что

$$\rho_x(a(t,s,x),a(t,s,y))\le k(t,s)|x-y|,$$

$$\rho_x(b_1(t,x_1),b_1(t,y_1))\le k_1(t)|x_1-y_1|,$$

$$\rho_x(b_2(s,x_2),b_2(s,y_2))\le k_2(s)|x_2-y_2|,$$

$$|g(t,s,x)-g(t,s,y)|\le \overline{k}(t,s)|x-y|$$

при $|x-\overline{u}(t,s)|\le\alpha$, $|y-\overline{u}(t,s)|\le\alpha$, $|x_1-\overline{u}(t,0)|\le\alpha$, $|y_1-\overline{u}(t,0)|\le\alpha$, $|x_2-\overline{u}(0,s)|\le\alpha$,

$|y_2-\overline{u}(0,s)|\le\alpha$, где $\overline{u}(\cdot)\in A$, $\alpha>0$, то

$$\rho_x(F(\tau,\nu,x),F(\tau,\nu,y)) \le k(\Phi_1(\tau),\Phi_2(\nu))[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}[\mu_2(\Phi_2(\nu))]^{-1}|x-y|,$$
$$\rho_x(c_1(\tau,x_1),c_1(\tau,y_1)) \le k_1(\Phi_1(\tau))[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}|x_1-y_1|,$$

$$\rho_x(c_2(\nu,x_2),c_2(\nu,y_2)) \le k_2(\Phi_2(\nu))[\mu_2(\Phi_2(\nu))]^{-1}|x_2-y_2|,$$
$$|f(\tau,\nu,x)-f(\tau,\nu,y)| \le \overline{k}(\Phi_1(\tau),\Phi_2(\nu))[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}[\mu_2(\Phi_2(\nu))]^{-1}|x-y|$$

при $|x-\overline{\upsilon}(\tau,\nu)|\le\alpha$, $|y-\overline{\upsilon}(\tau,\nu)|\le\alpha$, $|x_1-\overline{\upsilon}(\tau,0)|\le\alpha$, $|y_1-\overline{\upsilon}(\tau,0)|\le\alpha$,
$|x_2-\overline{\upsilon}(0,\nu)|\le\alpha$,
$|y_2-\overline{\upsilon}(0,\nu)|\le\alpha$, где $\overline{\upsilon}=\overline{u}\circ(\Phi_1,\Phi_2)$.

**Доказательство.** Ясно, что

$$\rho_x(F(\tau,\nu,x),F(\tau,\nu,y)) = \rho_x(a(\Phi_1(\tau),\Phi_2(\nu),x)[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}[\mu_2(\Phi_2(\nu))]^{-1},$$
$$a(\Phi_1(\tau),\Phi_2(\nu),y)[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}[\mu_2(\Phi_2(\nu))]^{-1}) = [\mu_1(\Phi_1(\nu))]^{-1}[\mu_2(\Phi_2(\nu))]^{-1}\times$$
$$\times\rho_x(a(\Phi_1(\tau),\Phi_2(\nu),x),a(\Phi_1(\tau),\Phi_2(\nu),y)) \le k_1(\Phi_1(\tau),\Phi_2(\nu))[\mu_1(\Phi_1(\tau))]^{-1}[\mu_2(\Phi_2(\nu))]^{-1}|x-y|$$

при $|x-\overline{\upsilon}(\tau,\nu)|\le\alpha$, $|y-\overline{\upsilon}(\tau,\nu)|\le\alpha$.

Аналогично проверяется справедливость остальных неравенств. Лемма доказана.

Положим

$$\psi(\tau,\nu,z,w)=\inf\{|u-w|:u\in F(\tau,\nu,z)\},\ q_1(\tau,x,y)=\inf\{|z-y|:z\in c_1(\tau,x)\},$$
$$q_2(\nu,x,y)=\inf\{|u-y|:u\in c_2(\nu,x)\},\ q_0(x)=\inf\{|u-x|:u\in M_0\},$$

$$\tilde{F}(\upsilon)=\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}\psi(\tau,\nu,\upsilon(\tau,\nu),\upsilon_{\tau\nu}(\tau,\nu))d\tau d\nu+\int_0^{d_1}q_1(\tau,\upsilon(\tau,0),\upsilon_\tau(\tau,0))d\tau+$$
$$+\int_0^{d_2}q_2(\nu,\upsilon(0,\nu),\upsilon_\nu(0,\nu))d\nu+q_0(\upsilon(0,0)),$$

$$I_m(\upsilon)=I(\upsilon)+m\tilde{F}(\upsilon).$$

**Теорема 1.** Пусть $(\tau,\nu)\to f(\tau,\nu,z)$, $(\tau,\nu)\to F(\tau,\nu,z)$, $\tau\to c_1(\tau,x)$, $\nu\to c_2(\nu,x)$ измеримы, $M_0$, $F(\tau,\nu,z)$, $c_1(\tau,x)$ и $c_2(\nu,y)$ непусты, компактны при $(\tau,\nu,z)\in[0,d_1]\times[0,d_2]\times R^n$, $(\tau,x)\in[0,d_1]\times R^n$, $(\nu,y)\in[0,d_2]\times R^n$, существуют $k(\cdot)$, $\overline{k}(\cdot)\in L_1([0,d_1]\times[0,d_2])$,

$k_1(\cdot),\ \overline{k}_1(\cdot)\in L_1[0,d_1],\ k_2(\cdot),\ \overline{k}_2(\cdot)\in L_1[0,d_2]$, где $\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}k(\tau,\nu)d\tau\,d\nu<1$ или $k(\tau,\nu)=\overline{k}_1(\tau)\overline{k}_2(\nu)$ такие, что

$$\rho_x(F(\tau,\nu,x),F(\tau,\nu,y))\le k(\tau,\nu)|x-y|,$$
$$\rho_x(c_1(\tau,x),c_1(\tau,y))\le k_1(\tau)|x-y|,$$
$$\rho_x(c_2(\nu,x),c_2(\nu,y))\le k_2(\nu)|x-y|,$$
$$|f(\tau,\nu,x)-f(\tau,\nu,y)|\le\overline{k}(\tau,\nu)|x-y|$$

при $x,y\in R^n$. Если $\overline{\upsilon}\in A^n([0,d_1]\times[0,d_2])$ решение задачи (16), (17), то существует число $m_0$ такое, что $\overline{\upsilon}$ минимизирует $I_m(\upsilon)$ в $A^n([0,d_1]\times[0,d_2])$ при $m\ge m_0$.

**Доказательство.** Пусть $\upsilon\in A^n([0,d_1]\times[0,d_2])$. Положим $p_1(\tau)=q_1(\tau,\upsilon(\tau,0),\upsilon_\tau(\tau,0))$, $p_2(\nu)=q_2(\nu,\upsilon(0,\nu),\upsilon_\nu(0,\nu))$, $\varphi(0)=\psi(0)\in M_0$, где $q_0(\upsilon(0,0))=|\upsilon(0,0)-\varphi(0)|$, $\delta=q_0(\upsilon(0,0))$. По теореме 2.1.2 [5] существуют решения $\overline{x}(\tau)$ и $\overline{y}(\nu)$ задач $\dot{x}(\tau)\in c_1(\tau,x(\tau))$ и $\dot{y}(\nu)\in c_2(\nu,y(\nu))$, $x(0)=y(0)=\varphi(0)$ соответственно, что

$$|\overline{x}(\tau)-\upsilon(\tau,0)|\le\eta_1(\tau),\quad |\dot{\overline{x}}(t)-\upsilon_\tau(\tau,0)|\le k_1(\tau)\eta_1(\tau)+p_1(\tau),$$
$$|\overline{y}(\nu)-\upsilon(0,\nu)|\le\xi_1(\nu),\quad |\dot{\overline{y}}(\nu)-\upsilon_\nu(0,\nu)|\le k_2(\nu)\xi_1(\nu)+p_2(\nu),$$

где $\eta_1(\tau)=\delta e^{m_1(\tau)}+\int_0^\tau e^{m_1(\tau)-m_1(t)}p_1(t)dt$, $\xi_1(\nu)=\delta e^{m_2(\nu)}+\int_0^\nu e^{m_2(\nu)-m_2(s)}p_2(s)ds$, $m_1(\tau)=\int_0^\tau k_1(t)dt$, $m_2(\nu)=\int_0^\nu k_2(s)ds$. Положив в лемме 1 (лемме 2) $\psi(\tau)=\overline{x}(\tau)$, $\varphi(\nu)=\overline{y}(\nu)$, $\rho(\tau,\nu)=\psi(\tau,\nu,\upsilon(\tau,\nu),\upsilon_{\tau\nu}(\tau,\nu))$ получим, что существует такое решение $\upsilon_0(\tau,\nu)$ задачи (17) для которого выполняется неравенство

$$|\upsilon(\tau,\nu)-\upsilon_0(\tau,\nu)|\le\frac{c}{1-\int_0^T\int_0^S k(\tau,\nu)d\tau\,d\nu}$$

$\left(|\upsilon(\tau,\nu)-\upsilon_0(\tau,\nu)|\le ce^{\int_0^\tau k_1(t)dt+\int_0^\nu k_2(s)ds}\right)$,

где

$$c = \max_{\tau\in[0,d_1],\ \nu\in[0,d_2]}(\xi_1(\nu)+\eta_1(\tau)+\xi_1(0)+\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}\rho(\tau,\nu)d\tau d\nu) =$$

$$= \max_{\tau\in[0,d_1],\ \nu\in[0,d_2]}(\delta e^{m_2(\nu)}+\int_0^{\nu}e^{m_2(\nu)-m_2(s)}p_2(s)ds+\delta e^{m_1(\tau)}+\int_0^{\tau}e^{m_1(\tau)-m_1(s)}p_1(s)ds+\delta+$$

$$+\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}\rho(\tau,\nu)d\tau d\nu) \le (e^{m_1(d_1)}+e^{m_2(d_2)}+1)(\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}\psi(t,s,\upsilon(t,s),\upsilon_{ts}(t,s))dtds+$$

$$+\int_0^{d_1}q_1(t,\upsilon(t,0),\upsilon_t(t,0))dt+\int_0^{d_2}q_2(s,\upsilon(0,s),\upsilon_s(0,s))ds+q_0(\upsilon(0,0)),$$

Ясно, что

$$\left|I(\upsilon)-I(\upsilon_0)\right| \le \int_0^{d_1}\int_0^{d_2}\bar{k}(\tau,\nu)\left|\upsilon(\tau,\nu)-\upsilon_0(\tau,\nu)\right|d\tau d\nu \le \max\{\frac{c}{1-\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}k(\tau,\nu)d\tau d\nu}\times$$

$$\times\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}\bar{k}(\tau,\nu)d\tau d\nu,\ \ c\,e^{\int_0^{d_1}k_1(\tau)d\tau+\int_0^{d_2}k_2(\nu)d\nu}\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}\bar{k}(\tau,\nu)d\tau d\nu\} = L\tilde{F}(\upsilon),$$

где

$$L = \max\left\{\frac{\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}\bar{k}(\tau,\nu)d\tau d\nu}{1-\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}k(\tau,\nu)d\tau d\nu},\ \ e^{\int_0^{d_1}k_1(\tau)d\tau+\int_0^{d_2}k_2(\nu)d\nu}\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}\bar{k}(\tau,\nu)d\tau d\nu\right\}(e^{m_1(d_1)}+e^{m_2(d_2)}+1).$$

Покажем, что при $m \ge L$ функция $\bar{\upsilon}$ минимизирует также функционал $I_m$ в пространстве $A^n([0,d_1]\times[0,d_2])$. Предположим противное. Пусть существует $\tilde{\upsilon}\in A^n([0,d_1]\times[0,d_2])$ такое, что $I_m(\tilde{\upsilon}) < I_m(\bar{\upsilon})$. Так как для $\tilde{\upsilon}$ существует такое решение $\tilde{\upsilon}_0$ задачи (17), что $\left|I(\tilde{\upsilon})-I(\tilde{\upsilon}_0)\right| \le m\tilde{F}(\tilde{\upsilon})$, то

$$I(\tilde{\upsilon}_0) \le I(\tilde{\upsilon})+m\tilde{F}(\tilde{\upsilon}) = I_m(\tilde{\upsilon}) < I(\bar{\upsilon}).$$

Полученное противоречие означает, что $\bar{\upsilon}$ минимизирует $I_m(\upsilon)$ в $A^n([0,d_1]\times[0,d_2])$. Теорема доказана.

Пусть $X$ банахово пространство, $f: X\to R$. Положим (см.[1])

$$f^0(x,\upsilon) = \limsup_{y\to x,\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda}(f(y+\lambda\upsilon)-f(y)),$$

$$\partial f(x) = \{p\in X^* : f^0(x,\upsilon) \ge \langle p,\upsilon\rangle \text{ при } \upsilon\in X\}.$$

**Теорема 2.** Если выполняются условие теоремы 1 и $\overline{\upsilon} \in A^n([0,d_1]\times[0,d_2])$ является решением задачи (16), (17), то существуют число $m > 0$ и функции $v(\cdot) \in A^n([0,d_1]\times[0,d_2])$, где $v(d_1,\nu) = v(\tau,d_2) = 0$ при $(\tau,\nu) \in [0,d_1]\times[0,d_2]$, $v_1(\cdot) \in W^n_{1,1}[0,d_1]$, $v_2(\cdot) \in W^n_{1,1}[0,d_2]$ такие, что

1) $(v_{\tau\nu}(\tau,\nu), -v(\tau,\nu)) \in \partial(f(\tau,\nu,\overline{\upsilon}(\tau,\nu)) + m\psi(\tau,\nu,\overline{\upsilon}(\tau,\nu),\overline{\upsilon}_{\tau\nu}(\tau,\nu))$,
2) $(v_\tau(\tau,0) - \dot{v}_1(\tau), -v_1(\tau)) \in m\partial q_1(\tau,\overline{\upsilon}(\tau,0),\overline{\upsilon}_\tau(\tau,0))$,
3) $(v_\nu(0,\nu) - \dot{v}_2(\nu), -v_2(\nu)) \in m\partial q_2(\nu,\overline{\upsilon}(0,\nu),\overline{\upsilon}_\nu(0,\nu))$,
4) $v(0,0) - v_1(0) - v_2(0) \in m\partial q_0(\overline{\upsilon}(0,0))$,
5) $v_1(d_1) = 0,\ v_2(d_2) = 0.$

**Доказательство.** Если $m \geq L$, то из теоремы 1 следует, что $\overline{\upsilon}$ минимизирует $I_m(\upsilon) = I(\upsilon) + m\tilde{F}(\upsilon)$ в $A^n[0,d_1]\times[0,d_2]$. Поэтому $I^0_m(\overline{\upsilon};\upsilon) \geq 0$. Используя лемму Фату (см. [9]) получим, что

$$0 \leq I^0_m(\overline{\upsilon};\upsilon) \leq \Phi(\upsilon) = \int_0^{d_1}\int_0^{d_2} f^0(\tau,\nu,\overline{\upsilon}(\tau,\nu);\upsilon(\tau,\nu))d\tau d\nu +$$

$$+m(\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}\psi^0(\tau,\nu,\overline{\upsilon}(\tau,\nu),\overline{\upsilon}_{\tau\nu}(\tau,\nu);\upsilon(\tau,\nu),\upsilon_{\tau\nu}(\tau,\nu))d\tau d\nu +$$

$$+\int_0^{d_1} q^0_1(t,\overline{\upsilon}(\tau,0),\overline{\upsilon}_\tau(\tau,0);\upsilon(\tau,0),\upsilon_\tau(\tau,0))d\tau +$$

$$+\int_0^{d_2} q^0_2(\nu,\overline{\upsilon}(0,\nu),\overline{\upsilon}_\nu(0,\nu);\upsilon(0,\nu),\upsilon_\nu(0,\nu))d\nu + q^0_0(\overline{\upsilon}(0,0);\upsilon(0,0))).$$

Ясно, что $\upsilon = 0$ минимизирует функционал $\Phi(\upsilon)$ на $A^n[0,d_1]\times[0,d_2]$ и выполнены условия теоремы 3.1.2 [1]. Поэтому существуют функции $v(\cdot) \in A^n([0,d_1]\times[0,d_2])$, где $v(d_1,\nu) = v(\tau,d_2) = 0$ при $(\tau,\nu) \in [0,d_1]\times[0,d_2]$, $v_1(\cdot) \in W^n_{1,1}[0,d_1]$, $v_2(\cdot) \in W^n_{1,1}[0,d_2]$ такие, что

1) $(v_{\tau\nu}(\tau,\nu), -v(\tau,\nu)) \in \partial(f(\tau,\nu,\overline{\upsilon}(\tau,\nu)) + m\psi(\tau,\nu,\overline{\upsilon}(\tau,\nu),\overline{\upsilon}_{ts}(\tau,\nu))$,

2) $(v_\tau(\tau,0) - \dot{v}_1(\tau), -v_1(\tau)) \in m\partial q_1(\tau,\overline{\upsilon}(\tau,0),\overline{\upsilon}_\tau(\tau,0))$,

3) $(v_\nu(0,\nu) - \dot{v}_2(\nu), -v_2(\nu)) \in m\partial q_2(\nu,\overline{\upsilon}(0,\nu),\overline{\upsilon}_s(0,\nu))$,

4) $v(0,0) - v_1(0) - v_2(0) \in m\partial q_0(\overline{\upsilon}(0,0))$,

5) $v_1(d_1) - v(d_1,0) = 0,\ \ v_2(d_2) - v(0,d_2) = 0,\ \ v(d_1,d_2) = 0.$

Отсюда следует справедливость теоремы 2. Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Clarke F. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. Springer-Verlag, London, 2013, 591 p.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление, М. Наука,1979, 429 с.
3. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д. и др. Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж. 1986, 103 с.
4. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977, 624 с.
5. Нуримов Т.Н., Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства, Узбекстан, Изд-во «Фан» АН УзССР, 1991, 193 с.
6. Садыгов М.А. Негладкий анализ и его приложения к экстремальной задачи для включения Гурса-Дарбу. Баку, 1999, 135 с.
7. Садыгов М.А. Свойства оптимальных траекторий дифференциальных включений. Канд. дис. Баку 1983, 116 с.
8. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986, 296 с.
9. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987, 760 с.


## Extremal problem for the Goursat-Darboux type inclusion in infinite domain


**M.A. Sadygov[1], J.J. Mamedova[2], H.S. Akhundov[1]**

[1] Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan

[2] Baku State University, Baku, Azerbaijan

e-mail: misreddin08@rambler.


## ABSTRACT


In the work the necessary condition of extremum for the extremal problem for the Goursat-Darboux type differential inclusions in infinite domain is obtained.



**Keywords:** problem of Goursat-Darboux, normal integrant, inclusion, extremal problem.


## REFERENCES


1. Clarke F. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control, Springer-Verlag, London, 2013, 591 p.

2. Aleklseyev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimalnoye upravleniye, M.: Nauka, 1979, 429 s. (Aleklseyev V.M., Tixomirov V.M., Fomin S.V. Optimal control, M.: Nauka, 1979, 429 p.) (in Russian)
3. Borisovich Y.Q., Qelman B.D. i dr. Vvedeniye v teoriyu mnoqoznachnıkh otobrajeniy. Voronej. 1986, 103 s. (Borisovich Yu.G., Gelman B.D. et al. Introduction to the theory of set-valued mappings. Voronezh, 1986, 103 p.) (in Russian).
4. Varqa Dj. Optimalnoye upravleniye differentsialnımi i funktsionalnımi uravneniyami. M.: Nauka, 1977, 624 s. (Warga J. Optimal control of differential and functional equations. M.: Nauka, 1977, 623 p.) (in Russian).
5. Nurimov T.N., Filatov A.N., Sharova L.V. İnteqralnıye neravenstva, Uzbekistan, İzd-vo «Fan» AN Uz SSR, 1991, 193 s. (Nurimov T.N., Filatov A.N., Scharova L.V. Integral inequality, Uzbekistan, «Fan» AN UzSSR, 1991, 193 p.) (in Russian).
6. Sadıgov M.A. Negladkiy analiz i eqo prilojeniya k ekstremalnoy zadachi dlya vklyucheniya Qursa-Darbu. Baku, 1999, 135 s. (Sadygov M.A. The nonsmooth analysis and its applications to the extremum problem for inclusions Goursat-Darboux type. Elm-1999, 135 p.) (in Russian).
7. Sadıgov M.A. Svoystva optimalnıkh trayektoriy differentsialnıkh vklyucheniy. Kand. dis. Baku 1983, 116 s. (Characteristic optimum trajectory for differential inclusion. Candidate dissert. 1984, 116 p.) (in Russian).
8. Tolstonoqov A.A. Differentsialnıye vklchyueniya v banakhovom prostranstve. Novosibirsk: Nauka, 1986, 296 s. (Tolstonogov A.A. Differential inclusions in the Banach space. Novosibirsk: Nauka, 1986, 296 p.) (in Russian).
9. Federer Q. Geometricheskaya teoriya merı. M.: Nauka, 1987, 760 s. (Federer G. Geometric measure theory. M.: Nauka, 1987, 760 p.) (in Russian).